Das große Text

zu

Taylorreihen

Ein riesiges Übungsbuch

Die Darstellung einer Funktion als unendliche Potenzreihe ist eine faszinierende Geschichte.
Sie zeigt die Bedeutung der ganzrationalen Funktionen, mit denen man kompliziertere Funktionen näherungsweise darstellen und berechnen kann. Ich habe hier ein wenig Theorie zusammengestellt und vor allem eine unglaublich große Sammlung an Reihenentwicklungen und Näherungsrechnungen.

Text Nr. 51230

Stand: 19. März 2018

FRIEDRICH W. BUCKEL

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.de

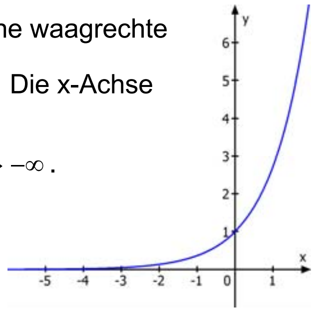
Inhalt

4. Zusammensetzen von Taylorreihen aus anderen Reihen

5. Taylorreihen-Entwicklung um $x = x_0$ mit Restglied-Abschätzung **38**

1 Einführungsbeispiel: Näherungskurven zu $y = e^x$

In der Schule lernt man, dass viele Funktionen für $x \to \infty$ oder für $x \to -\infty$ eine lineare Näherungsfunktion besitzen. Man spricht dann davon, dass ihr Schaubild eine waagrechte Asymptote hat. Für die Funktion $f(x) = e^x$ gilt zum Beispiel $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$. Die x-Achse ist daher eine waagrechte Asymptote für die Kurve $y = e^x$ und zwar für $x \to -\infty$.



Daher muss man nicht mehr ausrechnen, was $f(-10) = e^{-10}$ ist.

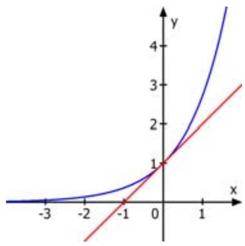
Die Antwort lautet schlicht: $f(-10) \approx 0$.

Man kann auch Näherungskurven in der Umgebung eines Punktes z. B. $P(0\,|\,1)$ aufstellen.

Die einfachste **Näherungs„kurve“** ist die **Tangente** in P. Sie hat die Gleichung $y = x + 1$.

Beweis:

	$f(x) = e^x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = e^x$.
Tangentensteigung:	$f'(0) = e^0 = 1$
Geradengleichung:	$y = mx + n$ mit $n = 1$
Ergebnis:	$y = x + 1$, bzw. $g_1(x) = x + 1$



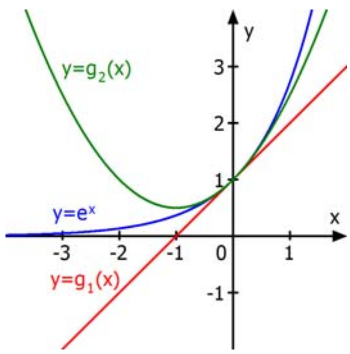
Mit einer Tangente als Näherungskurve kann man eigentlich nicht zufrieden sein, denn sie nähert sich wegen der fehlenden Krümmung nur schlecht an die Exponentialkurve an.

Also versucht man es mit ganzrationalen Funktionen (Polynomen) höheren Grades.
Doch welche Bedingungen soll man verwenden, damit die Näherung besser wird?

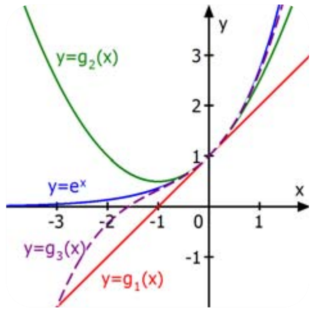
Die lineare Tangentenfunktion hat mit der Funktion $f(x) = e^x$ nur die Werte $f(0) = 1$ und $f'(0) = 1$ (Tangentensteigung) gemeinsam. Für eine ***Näherungskurve 2. Grades*** verlangt man, dass auch die Krümmung übereinstimmt, also die zweite Ableitung $f''(0) = 1$.

Wegen $f''(x) = e^x$ und $f''(0) = 1$ ergibt dies folgende Rechnung:

Ansatz für die Näherungsfunktion:		$g_2(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$
	mit	$g_2'(x) = 2a_2x + a_1$
	und	$g_2''(x) = 2a_2$.
Bedingung:	$g_2(0) = f(0)$:	$a_0 = e^0 = 1$
	$g_2'(0) = f'(0)$:	$a_1 = e^0 = 1$
	$g_2''(0) = f''(0)$:	$2a_2 = e^0 = 1 \quad \Rightarrow \quad a_2 = \frac{1}{2}$
Ergebnis:		$g_2(x) = \frac{1}{2}x^2 + x + 1$



Für eine ***Näherungskurve 3. Grades*** verlangt man, dass die Näherungsfunktion g_3 mit f bis zur 3. Ableitung an der Stelle 0 übereinstimmt. Da alle Ableitungen von f den Term e^x besitzen, also $f^{(n)}(x) = e^x$, ergibt dies folgende Rechnung:



Ansatz für die Näherungsfunktion: $g_3(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$

mit $g_3{}'(x) = 3a_3x^2 + 2a_2x + a_1$

und $g_3{}''(x) = 6a_3x + 2a_2$.

sowie $g_3{}'''(x) = 6a_3$

Bedingungen:

$g_3(0) = f(0)$: $a_0 = e^0 = 1$

$g_3{}'(0) = f'(0)$: $a_1 = e^0 = 1$

$g_3{}''(0) = f''(0)$: $2a_2 = e^0 = 1 \Rightarrow a_2 = \frac{1}{2}$

$g_3{}'''(0) = f'''(0)$: $6a_3 = 1 \Rightarrow a_3 = \frac{1}{6}$

Ergebnis: $g_3(x) = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + 1$

Wichtig ist nun folgendes: Wie entsteht der Bruch $\frac{1}{6}$ als Koeffizient von x^3?

Verfolgt man die Rechnung genauer, dann erkennt man, dass $6a_3 = 1 \Rightarrow a_3 = \frac{1}{6}$ die Ursache ist.

Und dieser Term $6a_3$ entsteht durch drei Ableitungen.

Aus $a_3x^3 \xrightarrow{\text{1. Ableitung}} \boxed{3} \cdot a_3x^2 \xrightarrow{\text{2. Ableitung}} \boxed{3} \cdot \boxed{2} \cdot a_3x \xrightarrow{\text{3. Ableitung}} \boxed{3} \cdot \boxed{2} \cdot a_3 = \boxed{6} \cdot a_3$

Wir nehmen diese Überlegung nach der nächsten Näherungsfunktion nochmals auf.

Für eine ***Näherungskurve 4. Grades*** verlangen wir, dass die Näherungsfunktion g_4 mit f bis zur 4. Ableitung an der Stelle 0 übereinstimmt.

Ansatz für die Näherungsfunktion: $g_4(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$

mit $g_4{}'(x) = \boxed{4} \cdot a_4x^3 + \boxed{3} \cdot a_3x^2 + \boxed{2} \cdot a_2x + a_1$

und $g_4{}''(x) = \boxed{4} \cdot \boxed{3} \cdot a_4x^2 + \boxed{3} \cdot \boxed{2} \cdot a_3x + 2a_2$.

sowie $g_4{}'''(x) = \boxed{4} \cdot \boxed{3} \cdot \boxed{2} \cdot a_4x + \boxed{3} \cdot \boxed{2} \cdot a_3$

und $g_4{}^{(4)}(x) = \boxed{4} \cdot \boxed{3} \cdot \boxed{2} \cdot a_4$

Bedingungen:

$g_4(0) = f(0)$: $a_0 = e^0 = 1$

$g_4{}'(0) = f'(0)$: $a_1 = e^0 = 1$

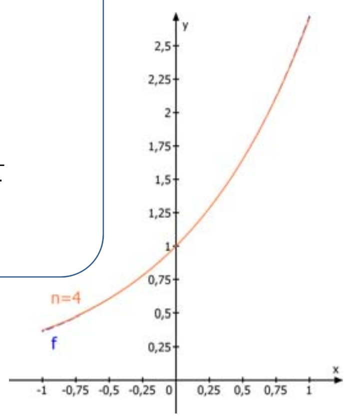
$g_4{}''(0) = f''(0)$: $2a_2 = e^0 = 1 \Rightarrow a_2 = \frac{1}{2}$

$g_4{}'''(0) = f'''(0)$ $3 \cdot 2 \cdot a_3 = 1 \Rightarrow a_3 = \frac{1}{3 \cdot 2} = \frac{1}{6}$

$g_4{}^{(4)}(0) = f^{(4)}(0)$: $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot a_4 = 1 \Rightarrow a_4 = \frac{1}{4 \cdot 3 \cdot 2} = \frac{1}{24}$

Ergebnis: $g_4(x) = \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + 1$

Die Abbildung zeigt die sehr gute Annährung des Graphen von g_4 an die Exponentialkurve (f) in einer Umgebung von $P(0\,|\,1)$.



In der Berechnung von g_4 habe ich gezeigt, wie die Bruch-Koeffizienten entstehen. Man könnte daher g_4 auch so schreiben:

$$g_4(x) = \tfrac{1}{4\cdot3\cdot2\cdot1}x^4 + \tfrac{1}{3\cdot2\cdot1}x^3 + \tfrac{1}{2\cdot1}x^2 + \tfrac{1}{1}x + 1$$

Oder mit etwas „Weitblick“: $g_4(x) = \tfrac{1}{4!}x^4 + \tfrac{1}{3!}x^3 + \tfrac{1}{2!}x^2 + \tfrac{1}{1!}x + \tfrac{1}{0!}$

bzw. umgeordnet: $g_4(x) = 1 + x + \tfrac{1}{2!}x^2 + \tfrac{1}{3!}x^3 + \tfrac{1}{4!}x^4$

Im Nenner stehen Fakultäten: $4! = 4\cdot3\cdot2\cdot1$, $3! = 3\cdot2\cdot1$, $2! = 2\cdot1$, $1! = 1$ und $0! = 1$.
Diese $0!$ wird stillschweigend eingefügt, weil sie die Formel abrundet.

Unter der *Annahme*, dass sich dies fortsetzt, müsste gelten:

$$g_5(x) = \tfrac{1}{5!}x^5 + \tfrac{1}{4!}x^4 + \tfrac{1}{3!}x^3 + \tfrac{1}{2!}x^2 + \tfrac{1}{1!}x + \tfrac{1}{0!}$$

$$g_n(x) = \tfrac{1}{n!}x^n + \tfrac{1}{(n-1)!}x^{n-1} + \ldots + \tfrac{1}{2!}x^2 + \tfrac{1}{1!}x + \tfrac{1}{0!}$$

Es ist allgemein üblich, die Reihenfolge der Potenzen der Größe nach anzuordnen:

Allgemein gilt: $$\boxed{g_n(x) = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \ldots + \frac{1}{(n-1)^2}x^{n-1} + \frac{1}{n!}x^n} \qquad (1)$$

Oder mit der Schreibweise des Summenzeichens: $g_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\cdot x^k$

Dabei gilt für die Koeffizienten: $a_k = \frac{1}{k!}$

Die rechte Seite der Formel (1) nennt man das **MacLaurin-Polynom** n-ter Ordnung von $f(x) = e^x$.
Oder auch das **Taylor-Polynom** n-ten Grades.

2 Grundwissen über Zahlenfolgen und Reihen / Potenzreihen

1. Beispiel:

Die **Folge** $a_n = \frac{12}{2^n}$ beginnt so: $a_1 = \frac{12}{2} = 6$ $a_2 = \frac{12}{4} = 3$, $a_3 = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$, $a_4 = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}$, ….

Es handelt sich hier um eine **geometrische Folge**, weil der Quotient aufeinander folgender Glieder konstant ist, nämlich $q = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2}$.

Die **Folge der Partialsummen** von a_n nennt man eine (geometrische) **Reihe**:

$$s_1 = a_1 = 6\,,$$
$$s_2 = a_1 + a_2 = 6 + 3 = 9\,,$$
$$s_3 = a_1 + a_2 + a_3 = 9 + \tfrac{3}{2} = \tfrac{21}{2}\,,$$
$$s_4 = a_1 + \ldots + a_4 = \tfrac{21}{2} + \tfrac{3}{4} = \tfrac{45}{4}, \ldots$$

allgemein: $s_n = a_1 + a_1 + \ldots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ bzw. $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{12}{2^k}$

Für geometrische Reihen gibt es eine Summenformel:

$$\boxed{s_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q}} \Rightarrow s_n = 6 \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} = 6 \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{1}{2}} = 12 \cdot \left[1-\left(\tfrac{1}{2}\right)^n\right] = 12 - \frac{12}{2^n}$$

Eine geometrische Reihe mit $|q| < 1$ ***konvergiert***, d.h. die Folge der Partialsummen hat einen Grenzwert, für den gilt: $\boxed{s = \lim_{n \to \infty} s_n = \frac{a_1}{1-q}}$, hier: $s = \frac{6}{1-\frac{1}{2}} = 12$.

s nennt man eine **konvergente unendliche Reihe** und schreibt:

$$s = 6 + 3 + \tfrac{3}{2} + \tfrac{3}{4} + \ldots = 24$$

2. Beispiel:

Aus der Folge $b_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot x^n$, wobei x eine feste reelle Zahl sein soll, bilde ich analog zu oben eine Partialsumme (Reihe), jetzt beginnend mit n = 0:

$s_0 = b_0$ d. h. $s_0 = 1$

$s_1 = b_0 + b_1$ d. h. $s_1 = 1 + \frac{1}{2}x$

$s_2 = b_0 + b_1 + b_2$ d. h. $s_2 = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x^2$

….

$s_n = b_0 + b_1 + b_2 + \ldots + b_n$ $s_n = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{8}x^3 + \ldots + \frac{1}{2^n}x^n$

In der Form $\boxed{s_n = a_o \cdot x^0 + a_1 \cdot x^1 + a_2 \cdot x^2 + \ldots a_n \cdot x^n}$ mit $a_k = \frac{1}{2^k}$

heißt diese Reihe eine **Potenzreihe**. Auch sie ist (für festes x) eine geometrische Reihe, denn

es gilt $q = \frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} x^{n+1}}{\left(\frac{1}{2}\right)^n x^n} = \frac{1}{2}x$ ist konstant. Also gilt die Summenformel:

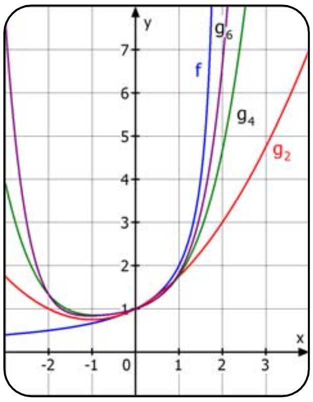
$$s_n = 1 \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{2}x\right)^n}{1-\frac{1}{2}x} \Leftrightarrow s_n = 2 \cdot \frac{1-\frac{1}{2^n}x^n}{2-x}$$

Diese Reihe konvergiert für $|q| < 1 \quad \Leftrightarrow \quad \left|\frac{x}{2}\right| < 1 \quad \Leftrightarrow \quad |x| < 2 \quad \Leftrightarrow \quad -2 < x < 2$

und hat den Grenzwert $s = \lim\limits_{n\to\infty} s_n = \frac{1}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{x}{2}} = \frac{2}{2-x}$

Für eine graphische Interpretation nenne ich diese Grenzwert-Funktion $f(x) = \frac{2}{2-x}$

und bezeichne die einzelnen Folgenglieder s_n der Reihe als Näherungsfunktionen $g_n(x)$.



Die Abbildung zeigt das Schaubild der Funktion $f(x) = \frac{2}{2-x}$,

der Näherungsfunktion 2. Grades: $g_2(x) = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x^2$

der Näherungsfunktion 4. Grades: $g_4(x) = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{8}x^3 + \frac{1}{16}x^4$

und der Näherungsfunktion 6. Grades:

$$\boxed{g_6(x) = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{8}x^3 + \frac{1}{16}x^4 + \frac{1}{32}x^5 + \frac{1}{64}x^6}.$$

Man beobachtet, dass sie alle an der Stelle x = 0 übereinstimmen,
und dass sie sich in der Umgebung dieser Stelle gut an den Graphen von f anschmiegen.

Der Grenzwert s existiert für $|q| < 1$, d.h. für jede Zahl x mit $\left|\frac{x}{2}\right| < 1 \quad \Leftrightarrow \quad |x| < 2 \quad \Leftrightarrow \quad -2 < x < 2$

Das bedeutet, dass die Näherungsfunktionen g_n für $-1 < x < 2$, für $n \to \infty$ konvergieren.

Beispielsweise gilt für x = 1: $g_2(1) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$

$g_3(1) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$

…

Und diese Zahlenfolge konvergiert gegen $f(1) = \frac{2}{2-1} = 2$.

3. Verallgemeinerung:

Allgemein sieht das so aus:

$$\boxed{s_n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n = \sum_{k=0}^{n} a_kx^k}$$

Das ist die Folge der Partialsummen der Folge $b_n = a_nx^n$.

Wenn die Reihe konvergiert, dann ist der Grenzwert die **unendliche Reihe**

$$s_n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} a_kx^k.$$

Eine Potenzreihe ist also eine unendliche Reihe, die im Konvergenzfall eine Funktion f darstellt. Bricht man diese Potenzreihe nach einem Grad n ab, liegt eine Näherungsfunktion von f vor.

4. Beispiel

Auf Seite 7/8 wurden Näherungsfunktionen für $f(x) = e^x$ entwickelt:

z.B. $$g_4(x) = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4$$

Als unendliche Reihe sieht dies so aus:

$$\boxed{g(x) = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \ldots} \quad \text{bzw.} \quad \boxed{g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \cdot x^k}$$

Weil diese Reihe für alle $x \in \mathbb{R}$ konvergiert, gilt

$$\boxed{e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \ldots}$$

Wenn man aber an einer bestimmten Stelle abbricht, weil die Genauigkeit der Näherung ausreicht, dann schreibt man:

$$e^x \approx 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \ldots + \frac{1}{n!}x^n$$

Den fehlenden Rest fasst man gerne in einem so genannten **Restglied $R_n(x)$** zusammen:

also $$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \ldots + \frac{1}{n!}x^n + R_n(x)$$

Dieses Restglied kann man durch schwierige Untersuchungen abschätzen und so ermitteln, wie genau der Näherungswert der Reihe ist. Auch das wird erst später gezeigt.

5. Beispiel

Potenzreihen kann man auch in dieser Form darstellen:

$$p_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots + a_{n-1}(x - x_0)^{n-1} + a_n(x - x_0)^n$$

bzw. $$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x - x_0)^k$$

Man nennt dies eine Entwicklung um die Stelle $x = x_0$. Eine solche Potenzreihe ist auch eine Folge von Partialsummen. Wenn sie für $n \to \infty$ konvergiert, schreibt man den Grenzwert (also die Grenzwertfunktion) als unendliche Reihe auf:

$$P(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k (x - x_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$$

Die Frage, für welche x eine Potenzreihe konvergiert, kann man damit beantworten:

Wenn ab einem bestimmten Index alle a_n ungleich 0 sind und der folgende Limes existiert, dann ist

$$r = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \qquad \text{(Quotientenkriterium)}$$

der Konvergenzradius des Intervalls, in dem die Reihe konvergiert.

Das Konvergenzintervall ist dann

$|x - x_0| < r$ bzw. $-r < x - x_0 < r \quad | +x_0$ also $x_0 - r < x < x_0 + r$, also $]\, x_0 - r ; x_0 + r[$

Potenzreihen werden ausführlich besprochen im Text 51120 (ab 2018)

3 MacLaurinsche Reihen

Man kann zu einer Funktion f ganzrationale Näherungsfunktionen (Polynome) g_n aufstellen, welche mit fortschreitendem Grad eine immer bessere Näherung der gegebenen Funktion f darstellen.
Dies wurde als Einstiegsbeispiel im Abschnitt 1.1 bereits gezeigt. Das wollen wir hier ganz allgemein durchführen. Für dann entstehende MacLaurin-Reihen wählt man stets die Entwicklungsstelle x = 0.
Das heißt, dass dort f und alle Näherungspolynome g_n übereinstimmen sollen.

Gegeben ist eine Funktion f, von der man voraussetzt, dass sie beliebig oft differenzierbar ist,
Das Ziel ist eine Darstellung von f als Potenzreihe, d. h. in der Form

$g(x) = a_o + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + ...$ mit den Ableitungen

$$g'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + ...$$

$$g''(x) = 2\cdot 1\cdot a_2 + 3\cdot 2\cdot a_3x + 4\cdot 3\cdot a_4\cdot x^2 + ...$$

$$g'''(x) = \underbrace{3\cdot 2\cdot 1}_{3!}\cdot a_3 + \underbrace{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}_{4!}\cdot a_4\cdot x + ...$$

Bedingung: f und g sollen an der Stelle x = 0 im Funktionswert und in allen Ableitungswerten übereinstimmen.

Daraus folgt:

$g(0) = f(0)$ d. h. $a_o = f(0)$

$g'(0) = f'(0)$ d. h. $a_1 = f'(0)$

$g''(0) = f''(0)$ d. h. $2\cdot 1\cdot a_2 = f''(0)$

$g'''(0) = f'''(0)$ d. h. $3\cdot 2\cdot 1\cdot a_3 = f'''(0)$

usw.

Daraus erhält man: $\boxed{a_0 = f(0),\quad a_1 = f'(0),\quad a_2 = \tfrac{1}{2!}\cdot f''(0),\quad a_3 = \tfrac{1}{3!}\cdot f'''(0)\quad \text{usw.}}$

Ergebnis: $f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}\cdot x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + ...$

bzw. $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$ mit $a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$

Dies ist also die allgemeine **MacLaurinsche Reihe**
Wenn diese Reihe konvergiert, dann ist g(x) identisch mit f(x), sodass man links f(x) schreibt.

Ausblick: Eine Taylorreihe entsteht, indem man die Funktion um eine beliebige Stelle $x = x_0$ entwickelt. Ihre allgemeine Form sieht so aus:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}\cdot(x - x_0) + \frac{f'(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + ...$$

(Siehe Abschnitte 5 und 6).
Bricht man eine Taylorreihe nach dem Summanden n-ten Grades ab,
spricht man von einem **Taylor-Polynom** n. Grades.
Ich werde dieses als $g_n(x)$ bezeichnen

Die **MacLaurinsche Reihe** ist also eine spezielle **Taylorreihe** und wird daher oft auch als Taylorreihe bezeichnet.

Taylor lebte von 1685 bis 1731. Der entwickelte 1715 seinen berühmten Satz von Taylor.

MacLaurin-Reihen - Beispielsammlung

3.1 $f(x)=e^x$ In 1.1 wurde ermittelt: $\boxed{e^x = 1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{4!}x^4+...}$ bzw. $\boxed{e^x=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\cdot x^k}$

bzw. $\boxed{e^x = 1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{24}x^4+...}$

Konvergenzradius $r=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)!}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)!}{n!}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}(n+1)=\infty$

Diese Taylorreihe konvergiert also für alle $x\in\mathbb{R}$.

3.2 $f(x)=e^{-x}$

Ableitungen: $f'(x)=-e^{-x}$, $f''(x)=e^{-x}$, $f^{(2n)}(x)=e^{-x}$, $f^{(2n+1)}(x)=-e^{-x}$

Folgerung: $f'(0)=-e^0=-1$, $f''(0)=1$ $f^{(2n)}(0)=1$, $f^{(2n+1)}(0)=-1$

Aus $e^{-x}=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}\cdot x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4+....$

wird daher $\boxed{e^{-x}=1-x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{24}x^4+-...}$ bzw. $\boxed{e^{-x}=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{k!}\cdot x^k}$

Diese Taylorreihe konvergiert für alle $x\in\mathbb{R}$

3.3 $f(x)=10x\cdot e^{-x}$

Ableitungen:
$$f'(x)=10\cdot e^{-x}-10x\cdot e^{-x}=10e^{-x}\cdot(1-x)=-10e^{-x}(x-1)$$
$$f''(x)=10e^{-x}(x-1)-10e^{-x}\cdot 1=10e^{-x}\cdot(x-2)$$
$$f'''(x)=-10e^{-x}(x-2)+10e^{-x}\cdot 1=-10e^{-x}(x-3)$$
$$f^{(4)}(x)=10e^{-x}(x-3)-10e^{-x}\cdot 1=10e^{-x}(x-4)$$
$$f^{(5)}(x)=-10e^{-x}(x-5),\quad f^{(6)}=10e^{-x}(x-6),\ \ldots$$

Man kann mit vollständiger Induktion beweisen: $f^{(n)}(x)=(-1)^n\cdot 10e^{-x}(x-n)$
Solche Beispiele werden im Text 45012 gezeigt, z.B. auf Seite 8.

Folgerung: $f(0)=0$, $f'(0)=10$,.. $f''(0)=-20$, $f'''(0)=30$, $f^{(4)}(0)=-40$, $f^{(5)}(0)=50$,...

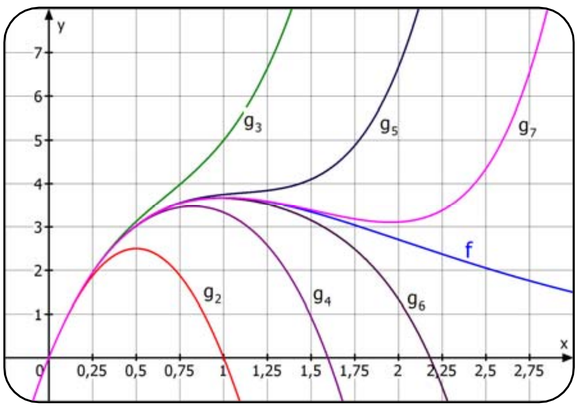
Aus $10x\cdot e^{-x}=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}\cdot x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4+....$

wird daher $\boxed{10x\cdot e^{-x}=10x-10x^2+5x^3-\frac{5}{3}x^4+\frac{5}{12}x^5-\frac{1}{12}x^6+\pm...}$

Die Abbildung zeigt das Schaubild von f und die der Taylorpolynome 2. bis 7. Grades:

$g_2(x)=10x-10x^2$

$g_3(x)=10x-10x^2+5x^3$ usw.



Konvergenzradius:

Es ist $a_n=(-1)^{n+1}\cdot\frac{10n}{n!}=(-1)^{n+1}\cdot\frac{10}{(n-1)!}$

$$r=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{10}{(n-1)!}}{\frac{10}{n!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n-1)!}=\lim_{n\to\infty}n=\infty$$

3.4 $f(x)=\sin x$

Ableitungen: $f'(x)=\cos x$, $f''(x)=-\sin x$, $f'''(x)=-\cos x$, $f^{(4)}(x)=\sin x$, ...

Folgerung: $f'(0)=\cos 0=1$, $f''(0)=0$ $f'''(0)=-1$, $f^{(4)}(0)=0$, ...

Aus $\sin x = f(0)+\frac{f'(0)}{1!}\cdot x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4+\ldots$ wird daher

$$\boxed{\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+-\ldots = x-\tfrac{1}{6}x^3+\tfrac{1}{120}x^5-\tfrac{1}{5040}x^7\pm} \quad \text{bzw.} \quad \boxed{\sin x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\cdot x^{2k+1}}$$

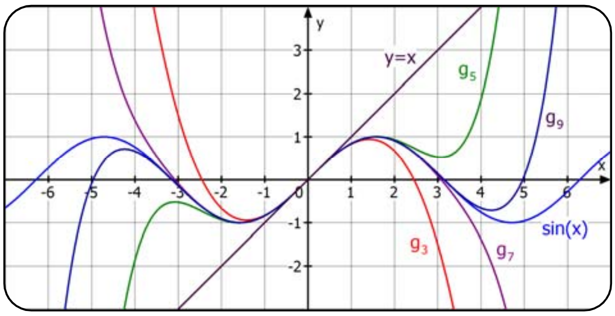
Diese Taylorreihe konvergiert für alle $x\in\mathbb{R}$, denn sie hat diesen Konvergenzradius:

$$r=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}}{\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+3)!}}\right|=\lim_{n\to\infty}\cdot\frac{(2n+3)!}{(2n+1)!}=\lim_{n\to\infty}(2n+3)(2n+2)=\infty$$

Die Abbildung zeigt die Annäherung der Schaubilder der Funktionen g_3, g_5, g_7 und g_9 an die Sinuskurve in einer Umgebung von $x = 0$.

mit $g_9(x)=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\frac{x^9}{9!}$

Außerdem: Für sehr kleine x gilt: $\sin x\approx x$.



3.5 $f(x)=\cos x$

Ableitungen: $f'(x)=-\sin x$, $f''(x)=-\cos x$, $f'''(x)=\sin x$, $f^{(4)}(x)=\cos x$, ...

Folgerung: $f'(0)=0$, $f''(0)=-1$ $f'''(0)=0$, $f^{(4)}(0)=1$, ...

Aus $\cos x = f(0)+\frac{f'(0)}{1!}\cdot x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4+\ldots$ wird daher

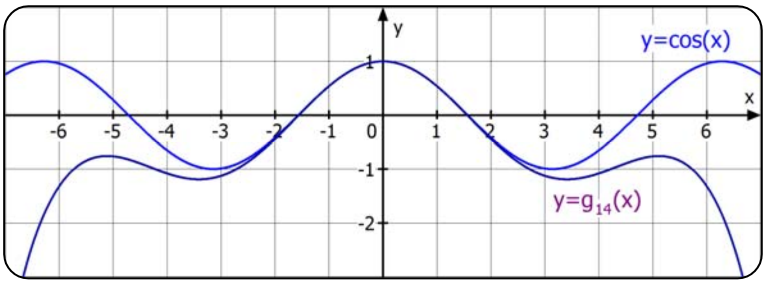
$$\boxed{\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+-\ldots = 1-\tfrac{1}{2}x^2+\tfrac{1}{24}x^4-\tfrac{1}{720}x^6\pm} \quad \text{bzw.} \quad \boxed{\cos x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2k)!}\cdot x^{2k}}$$

Folgerung: Für sehr kleine x gilt: $\cos x\approx 1-\tfrac{1}{2}x^2$.

Diese Taylorreihe konvergiert für alle $x\in\mathbb{R}$, denn sie hat diesen Konvergenzradius:

$$r=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(-1)^n}{(2n)!}}{\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+2)!}}\right|=\lim_{n\to\infty}\cdot\frac{(2n+2)!}{(2n)!}=\lim_{n\to\infty}(2n+2)(2n+1)=\infty$$

Die Abbildung zeigt die Kosinuskurve mit ihrer Taylor-Näherungskurve 14. Grades.



3.6 $f(x) = \arcsin(x)$ Andere Lösung siehe 4.5.

Die Ableitung von f ist $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \left(1-x^2\right)^{-1/2}$ (Siehe Text 47301 Seite 6)

$$f''(x) = -\tfrac{1}{2}\left(1-x^2\right)^{-\frac{3}{2}} \cdot (-2x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}^{\,3}}$$

$$f'''(x) = \frac{\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot (-2x) \cdot x}{\left(1-x^2\right)^3} = \frac{\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left[\left(1-x^2\right) + 3x^2\right]}{\left(1-x^2\right)^3} = \frac{2x^2+1}{\left(1-x^2\right)^{5/2}}$$

$$f^{(4)}(x) = \frac{4x \cdot \left(1-x^2\right)^{5/2} - \frac{5}{2}\left(1-x^2\right)^{3/2} \cdot (-2x)\left(2x^2+1\right)}{\left(1-x^2\right)^5} = \frac{\left(1-x^2\right)^{3/2} \cdot \left[4x \cdot \left(1-x^2\right) + 5x\left(2x^2+1\right)\right]}{\left(1-x^2\right)^5}$$

$$= \frac{4x - 4x^3 + 10x^3 + 5x}{\left(1-x^2\right)^{7/2}} = \frac{6x^3+9x}{\left(1-x^2\right)^{7/2}}$$

$$f^{(5)}(x) = \frac{\left(18x^2+9\right)\left(1-x^2\right)^{7/2} - \frac{7}{2}\left(1-x^2\right)^{5/2} \cdot (-2x) \cdot \left(6x^3+9x\right)}{\left(1-x^2\right)^7} = \frac{\cancel{\left(1-x^2\right)^{5/2}}\left[\left(18x^2+9\right)\left(1-x^2\right) + 7x \cdot \left(6x^3+9x\right)\right]}{\left(1-x^2\right)^{\cancel{7}\ 9/2}}$$

Zunächst ist ja $\arcsin x = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} \cdot x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \frac{f^{(5)}(0)}{5!}x^5 + \ldots$

Mit $f(0) = \arcsin(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = 0$, $f'''(0) = 1$, $f^{(4)}(0) = 0$ und $f^{(5)}(0) = 9$

folgt: $\arcsin x = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{9}{120}x^5 + \ldots.$ $\boxed{\arcsin x = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \ldots.}$

3.7 $f(x) = \arccos(x)$ (Siehe Text 47301 Seite 10) Andere Lösung siehe 4.6

Die Ableitung von f ist $f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = -\left(1-x^2\right)^{-1/2}$

Man erkennt, dass diese und die folgenden Ableitungen sich nur im Vorzeichen von denen der Funktion arcsin unterscheiden.

Daher gilt:

$$\arccos x = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} \cdot x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \frac{f^{(5)}(0)}{5!}x^5 + \ldots$$

Mit $f(0) = \arcsin(0) = \frac{\pi}{2}$, $f'(0) = -1$, $f''(0) = 0$, $f'''(0) = -1$, $f^{(4)}(0) = 0$ und $f^{(5)}(0) = -9$:

$$\boxed{\arccos(x) = \frac{\pi}{2} - x - \frac{1}{6}x^3 - \frac{3}{40}x^5 + \ldots.}$$

3.8 Weil die Funktion $f(x) = \ln x$ die Zahl 0 nicht im Definitionsbereich $\mathbf{D} = \mathbb{R}^+$ hat, verwendet man für die Reihenentwicklung an der Stelle x = 0 oft die Funktion

$f(x) = \ln(x+1)$.

Ableitungen:	$f'(x) = \frac{1}{x+1} = (x+1)^{-1}$,	$f(0) = \ln 1 = 0$
		$f'(0) = 1$
	$f''(x) = -(x+1)^{-2} = -\frac{1}{(x+1)^2}$	$f''(0) = -1$
	$f'''(x) = 2(x+1)^{-3} = \frac{2}{(x+1)^3}$	$f'''(0) = 2!$
	$f^{(4)}(x) = -3\cdot 2\cdot(x+1)^{-4} = -\frac{3!}{(x+1)^4}$	$f^{(4)}(0) = -3!$
	$f^{(5)}(x) = 4\cdot 3\cdot 2\cdot(x+1)^{-5} = \frac{4!}{(x+1)^5}$	$f^{(5)}(0) = 4!$

Aus $\ln(x+1) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}\cdot x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + ...$ wird daher

$$\ln(x+1) = 0 + \frac{1}{1!}\cdot x + \frac{-1}{2!}x^2 + \frac{2!}{3!}x^3 + \frac{-3!}{4!}x^4 + \frac{4!}{5!}x^5 + ...$$

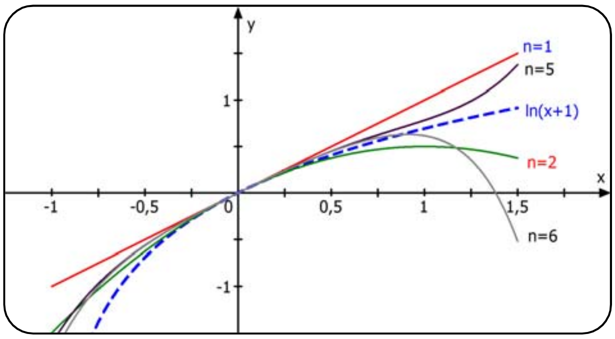
also: $\boxed{\ln(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - +...}$ bzw. $\boxed{\ln(x+1) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \cdot \frac{x^{k+1}}{k+1}}$

Diese Taylorreihe konvergiert für alle $x \in]-1;1[$, denn für den Konvergenzradius erhält man

$$r = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^n \frac{1}{n+1}}{(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{n+2}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{2}{n}}{1+\frac{1}{n}} = 1$$

Es lohnt sich, einige der Näherungskurven anzusehen:

Neben $y = \ln(x+1)$ sind dargestellt:



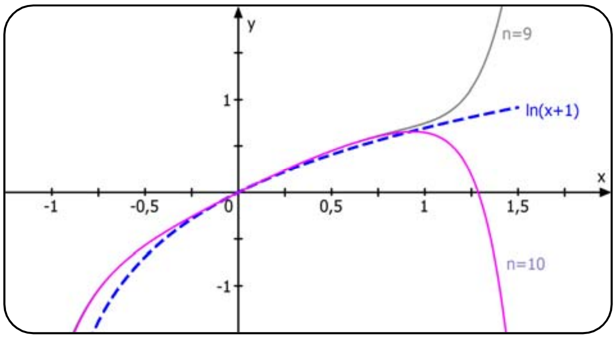
$$y = g_1(x) = x$$

$$y = g_2(x) = x - \frac{1}{2}x^2$$

$$y = g_5(x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5$$

$$y = g_6(x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{6}x^6$$

und hier:



$$y = g_9(x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + -.... + \frac{1}{9}x^9$$

$$y = g_{10}(x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + -.... - \frac{1}{10}x^{10}$$

Man kann damit Näherungsberechnungen machen:

ln(1.1)	
exakt	0.0953101798
Define $g10(x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{x}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^6}{6}+\frac{x^7}{7}-\frac{x^8}{8}+\frac{x^9}{9}-\frac{x^{10}}{10}$	done
Define $g8(x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{x}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^6}{6}+\frac{x^7}{7}-\frac{x^8}{8}$	done
g8(0.1)	
Näherungswert	0.0943351797
g10(0.1)	
Näherungswert	0.0943351798

$g_8(0{,}1) \approx \ln 1{,}1$ und $g_{10}(0{,}1) \approx \ln 1{,}1$

Man erkennt, dass diese Polynome sehr langsam konvergieren. Um eine Übereinstimmung in der 3. Dezimalen zu bekommen, muss die Reihe wesentlich länger sein.
Die Konvergenz wird immer langsamer, je weiter x von der Entwicklungsstelle 0 entfernt ist.